数学の出題のねらい

　数学Ⅰ・A に関する基本的な事項の習得度合いおよびその応用力をみることをねらいとしています．具体的には，基礎的な計算能力，確率を事象の考察に活用する能力，関数について考察する能力，定理を図形の計量に活用する能力などを総合的にみることを意図した出題を心掛けました．

2024 年度 数学 略解

第１問

問題１

$$\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2}=\frac{3\sqrt{7}(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}=7+2\sqrt{7}$$

$(2\sqrt{7})^2=28$ より，$5^2<(2\sqrt{7})^2<6^2$であるから，$5<2\sqrt{7}<6$

ゆえに，$12<7+2\sqrt{7}<13$

したがって，$a=12$，$b=2\sqrt{7}-5$

よって，　$ab(b+10)=36$

問題２

正の整数x,yは$x\leqq y$より，$\frac{1}{y}\leqq\frac{1}{x}$であるので，与式より，

$$\frac{7}{12}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leqq\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$$

$$x\leqq\frac{24}{7}$$

したがって，xは3以下の正の整数である．

(1)$x=1$のとき，$y\geqq 1$である．また，与式より，

$$\frac{1}{y}=\frac{7}{12}-1=-\frac{5}{12}$$

　この式を満たす正の整数yは存在しない．

(2)$x=2$のとき，$y\geqq 2$である．また，与式より，

$$\frac{1}{y}=\frac{7}{12}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

$$y=12$$

　したがって，$x=2$のとき，正の整数yは12である．

(3)$x=3$のとき，$y\geqq 3$である．また，与式より，

$$\frac{1}{y}=\frac{7}{12}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

$$y=4$$

　したがって，$x=3$のとき，正の整数yは4である．

(1), (2), (3)より，与式を満たす正の整数x,yの組は$(x,y)=(2,12),(3,4)$である．

問題３

データの個数をn，xとyの平均を$\bar{x},\bar{y}$，標準偏差をσ_x,σ_yとする．また，xとyの共分散をσ_{xy}，相関係数をrとする．

xとyの平均は,

$$\bar{x} = 5$$

$$\bar{y} = 4$$

xとyの標準偏差は,

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{6}(9 + 25 + 16 + 4 + 9 + 1)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \times \sqrt{64} = \frac{8}{\sqrt{6}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{6}(25 + 0 + 1 + 1 + 9 + 0)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \times \sqrt{36} = \sqrt{6}$$

xとyの共分散は,

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{6}(3 \times 5 + 5 \times 0 + (-4) \times (-1) + (-2) \times (-1) + (-3) \times (-3) + 1 \times 0)$$

$$= \frac{1}{6}(15 + 0 + 4 + 2 + 9 + 0) = 5$$

xとyの相関係数rは,

$$r = \frac{5}{\frac{8}{\sqrt{6}} \times \sqrt{6}} = \frac{5}{8} = 0.625$$

したがって，xとyの相関係数rは0.625である．

第２問

問題１

（ｉ)コインが１回目表，２回目表の場合，それぞれ１の目が出ていることになる．

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{144}$$

（ⅱ）コインが１回目表，２回目裏の場合，２にいるためには１回目のさいころの目と２回目のさいころの目の差が２である必要がある．（1 回目のさいころの目，２回目のさいころの目）＝（6,4)，（5,3)，（4,2)，（3,1)の４パターンなので，

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times 4=\frac{4}{144}=\frac{1}{36}$$

（ⅲ)コインが１回目裏，２回目表の場合，２にいるためには２回目のさいころの目と１回目のさいころの目の差が２である必要がある．（1 回目のさいころの目，２回目のさいころの目）＝（4,6)，（3,5)，（2,4)，（1,3)の４パターンなので，

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times 4=\frac{4}{144}=\frac{1}{36}$$

（ⅳ)コインが１回目裏，２回目裏の場合は２にいることができない．

以上(ｉ)～(ⅳ)から求める確率は，

$$\frac{1}{144}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{9}{144}=\frac{1}{16}$$

問題２

点Ｐが０にいるためには，コインの表が出たときのさいころの目の合計とコインの裏が出たときのさいころの目の合計が同じである必要がある．したがって，少なくとも１回は表と裏が出る必要がある（3 回ともコインが表あるいは裏が出た場合は対象外となる)．

３回のうち２回コインで表が出る組合せは（表表裏，表裏表，裏表表）の３通りがある．条件を満たすコインで２回表が出たときのさいころの目の組合せとしては，以下の表のように，それぞれ 15 通りある．

1回目の表のさいころの目	1	1	2	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4	5
2回目の表のさいころの目	1	2	1	3	2	1	4	3	2	1	5	4	3	2	1
裏のさいころの目	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6

同様にコインで裏が２回出た場合も，２回コインで裏が出る組合せは３通り，さいころの目の組合せは上の表の表と裏を入れ替えたものになるので，それぞれ 15 通りとなる．

以上から，求める確率は

$$\frac{3\times 15+3\times 15}{2\times 6\times 2\times 6\times 2\times 6}=\frac{90}{1728}=\frac{5}{96}$$

第３問

問題１

$f(x)=x^2-ax-2a+5$とし，$f(x)=0$の判別式をDとする．

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2-\frac{1}{4}a^2-2a+5$ より，軸は $x=\frac{1}{2}a$ である．

方程式 $f(x)=0$ が $x>0$ の範囲に異なる２つの解をもつための条件は,

(i) $D>0$，(ii) 軸＞0，(iii) $0<f(0)$

の３つである．

(i) $D>0$ から　$D=(a+10)(a-2)>0$ よって $a<-10$，$2<a$

(ii) 軸＞0 から　$\frac{1}{2}a>0$ よって $0<a$

(iii) $0<f(0)$ から　$0<-2a+5$　よって　$a<\frac{5}{2}$

(i), (ii), (iii) の共通範囲を求めて　$2<a<\frac{5}{2}$

問題２

$-1<x<2$ の範囲に少なくとも１つの解があるのは，次の場合である．

（1）$-1<x<2$ の範囲に，２つの解をもつ（重解を含む）

（2）$-1<x<2$ の範囲に，１つの解をもつ

(2a) 解の１つが $x=-1$ である

(2b) 解の１つが $x=2$ である

(2c) 解の１つが$-1<x<2$ にあり、他の解が$x<-1$ か，$2<x$ である

（1）$f(x)=0$ が $-1<x<2$ の範囲に２つの解（重解を含む）をもつための条件は，

$$① \ D \geqq 0,\ ② \ 0<f(-1),\ ③ \ 0<f(2),\ ④ \ -1<軸<2$$

である．

① $D \geqq 0$ から $(a+10)(a-2) \geqq 0$ よって $a \leqq -10,\ 2 \leqq a$

② $0<f(-1)$ から $0<6-a$ よって $a<6$

③ $0<f(2)$ から $0<9-4a$ よって $a<\frac{9}{4}$

④ $-1<軸<2$ から $-1<\frac{1}{2}a<2$ よって $-2<a<4$

①，②，③，④の共通範囲を求めて，(1)は，$2 \leqq a<\frac{9}{4}$

（2）$-1<x<2$ の範囲に，１つの解をもつ

（2a）$f(x)=0$の解の１つが $x=-1$ のとき，$f(-1)=0$ から $a=6$

このとき，方程式は $x^2-6x-7=(x+1)(x-7)=0$，よって，$x=-1$，7

$-1<x<2$ の範囲に解をもたないから，不適.

（2b）$f(x)=0$の解の１つが $x=2$ のとき，$f(2)=0$ から$a=9/4$

このとき，方程式は $x^2-\frac{9}{4}x+\frac{2}{4}=(x-2)\left(x-\frac{1}{4}\right)=0$，よって，$x=\frac{1}{4}$，2

ゆえに条件を満たす.

（2c） $f(x)=0$の解の１つが$-1<x<2$ にあり，他の解が$x<-1$ か，$2<x$ であるための条件は，$f(-1)f(2)<0$，すなわち，$(6-a)(9-4a)<0$

よって，$\frac{9}{4}<a<6$

以上から，（1）$2 \leqq a<\frac{9}{4}$, (2b) $a=\frac{9}{4}$, (2c) $\frac{9}{4}<a<6$ を合わせて，$2 \leqq a<6$

第４問

問題１

三角形 ABC で余弦定理より，

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{CA}^2 - 2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}\cdot\cos\angle\mathrm{BAC} = 49$$

したがって，$\mathrm{BC} = 7$.

三角形 ABC でチェバの定理より，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$$

$\mathrm{BC} = \mathrm{BF} + \mathrm{FC} = 7$なので，$\mathrm{FC} = 7 - \mathrm{BF}$を代入して整理すると，

$$\frac{3}{8-3}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{7-\mathrm{BF}}\cdot\frac{2}{5-2} = 1$$

$$\frac{3}{5}\cdot\mathrm{BF}\cdot\frac{2}{3} = 7 - \mathrm{BF}$$

$$\frac{7}{5}\mathrm{BF} = 7$$

$$\mathrm{BF} = 5$$

したがって，$\mathrm{FC} = 2$.

次に三角形 ABF でメネラウスの定理から，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CF}}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PA}} = 1$$

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PA}} = 1$$

$$\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{AP}} = \frac{10}{21}$$

$$\mathrm{AP}：\mathrm{PF} = 21:10$$

問題２

三角形 ABC の面積から，三角形 AED，三角形 CFE，三角形 BDF の面積を取り除くことで求める．

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{CA}\cdot \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

三角形 AED の面積は，$\mathrm{AD} = \mathrm{AE} = 3$，$\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$なので，

$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AD}\cdot \mathrm{AE}\cdot \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$$

三角形 ABC で正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}} = \frac{\mathrm{CA}}{\sin\angle\mathrm{CBA}} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}$$

なので，

$$\sin\angle\mathrm{CBA} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BC}}\cdot \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{5}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{14}\sqrt{3}$$

$$\sin\angle\mathrm{ACB} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}\cdot \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{8}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{7}\sqrt{3}$$

三角形 CFE の面積は，$\mathrm{CF} = \mathrm{CE} = 2$なので，

$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{CF}\cdot \mathrm{CE}\cdot \sin\angle\mathrm{ACB} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \frac{4}{7}\sqrt{3} = \frac{8}{7}\sqrt{3}$$

三角形 BDF の面積は，$\mathrm{BD} = \mathrm{BF} = 5$なので，

$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{BD}\cdot \mathrm{BF}\cdot \sin\angle\mathrm{CBA} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \frac{5}{14}\sqrt{3} = \frac{125}{28}\sqrt{3}$$

以上から，三角形 DEF の面積は

$$10\sqrt{3} - \frac{9}{4}\sqrt{3} - \frac{8}{7}\sqrt{3} - \frac{125}{28}\sqrt{3} = \frac{15}{7}\sqrt{3}$$