数学の出題のねらい

数Ｉ・Ａに関する基本的な事項の習得度合いおよびその応用力をみることをねらいとしています．具体的には，基礎的な計算能力，確率を事象の考察に活用する能力，関数について考察する能力，定理を図形の計量に応用する能力などを総合的にみることを意図した出題を心掛けました．

第 1 問

問題 1

$$2x^2 - xy - 6y^2 + 9x + 17y - 5 = (2x + 3y - 1)(x - 2y + 5)$$

問題 2

$490 = 2 \cdot 5 \cdot 7^2$より，$\frac{m}{490}$が既約分数であるとき，$m$は 2，5，7 の倍数ではない.

$\frac{4}{7} = \frac{280}{490}$，$\frac{3}{5} = \frac{294}{490}$であるから，$\frac{4}{7} < \frac{m}{490} < \frac{3}{5}$を満たす整数$m$は

$$281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293$$

のうちのいずれかの数値である．これらのうち，

282, 284, 286, 288, 290, 292 は 2 の倍数,

285, 290 は 5 の倍数,

287 は 7 の倍数である.

したがって，mの値は，281, 283, 289, 291, 293 である.

問題 3

xの平均は 320．yの平均は 38.2．共分散は-1112.

第 2 問

問題 1

乗法定理を用いて,

$$
\begin{aligned}
P(赤) &= P(\mathrm{A}\cap 赤) + P(\mathrm{B}\cap 赤) + P(\mathrm{C}\cap 赤) \\
&= P(\mathrm{A}) \times P(赤|\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) \times P(赤|\mathrm{B}) + P(\mathrm{C}) \times P(赤|\mathrm{C}) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{8}{8+2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{3+9} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{4+4} \\
&= \frac{4}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{16+5+10}{60} \\
&= \frac{31}{60}
\end{aligned}
$$

問題 2

$$
\begin{aligned}
P(\mathrm{A}|赤) &= \frac{P(\mathrm{A}\cap 赤)}{P(赤)} \\
&= \frac{4}{15} \div \frac{31}{60} \\
&= \frac{4}{15} \times \frac{60}{31} \\
&= \frac{16}{31}
\end{aligned}
$$

第３問

問題１

$F(x)=f(x)-g(x)$とすると，任意の実数 x に対して$f(x)>g(x)$が成り立つことは$F(x)$の最小値が正であることと同じである．

$$\begin{aligned}F(x)&=3x^2-6ax+10-(2x^2-4ax+3a)\\&=(x-a)^2-a^2-3a+10\end{aligned}$$

したがって，$F(x)$ は $x=a$ のとき最小値 $-a^2-3a+10$ をもつので，

$$-a^2-3a+10>0$$

$$(a+5)(a-2)<0$$

ゆえに，

$$-5<a<2$$

問題２

$y=f(x)$ のグラフを y 軸方向に-8 平行移動したグラフを表す式は，

$$y-(-8)=3x^2-6ax+10$$

$$y=3x^2-6ax+2$$

よって，

$$\begin{aligned}h(x)&=3x^2-6ax+2\\&=3(x-a)^2-3a^2+2\end{aligned}$$

$y=g(x)$ のグラフを原点に関して 対称移動したグラフを表す式は，

$$-y=2(-x)^2-4a(-x)+3a$$

$$y=-2x^2-4ax-3a$$

よって，

$$\begin{aligned}l(x)&=-2x^2-4ax-3a\\&=-2(x+a)^2+2a^2-3a\end{aligned}$$

任意の実数 x_1， x_2 に対して， $h(x_1)>l(x_2)$ が成り立つことは，

$$h(x)\text{の 最小値}>l(x)\text{の最大値}$$

であることと同じである．$h(x)$ は $x=a$ のとき最小値 $-3a^2+2$ をもつ．$l(x)$ は $x=-a$ のとき最大値 $2a^2-3a$ をもつ．したがって，

$$-3a^2+2>2a^2-3a$$

$$5a^2-3a-2<0$$

$$(a-1)(5a+2)<0$$

ゆえに，

$$-\frac{2}{5}<a<1$$

第 4 問

問題 1

$\triangle$ ABDにおいて余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cdot\cos\angle\mathrm{BAD}\\ &= 36 + 16 - 48\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= 76\\ \mathrm{BD} &= 2\sqrt{19}\end{aligned}$$

平行四辺形ABCDの対角線の交点Eは対角線の中点であるから，

$$\mathrm{BE} = \mathrm{DE} = \frac{1}{2}\mathrm{BD} = \sqrt{19}$$

$\triangle$ ACDにおいて点Gは中線AF, DEの交点であるから重心である．したがって，

$$\mathrm{DG} : \mathrm{EG} = 2 : 1$$

$$\mathrm{EG} = \frac{1}{3}\mathrm{DE} = \frac{\sqrt{19}}{3}$$

$$\mathrm{BG} = \mathrm{BE} + \mathrm{EG} = \frac{4}{3}\sqrt{19}$$

問題 2

$\triangle$ ACDにおいて点Gは重心であるから，

$$\mathrm{AG}:\mathrm{FG}=2:1$$

$\triangle$ BCDにおいて点Hは中線BF, CEの交点であるから重心である．したがって，

$$\mathrm{CH}:\mathrm{EH}=2:1$$

すなわち，

$$\mathrm{CE}:\mathrm{EH}=3:1$$

平行四辺形ABCDの対角線の交点Eは対角線の中点であるから，

$$\mathrm{AE}=\mathrm{CE}$$

したがって，

$$\mathrm{AE}:\mathrm{EH}=3:1$$

$\triangle$ AHFにおいて線分AN, EF, HGが点Oで交わるのでチェバの定理より，

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EH}}\cdot\frac{\mathrm{HN}}{\mathrm{FN}}\cdot\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{AG}}=1$$

$$\frac{3}{1}\cdot\frac{\mathrm{HN}}{\mathrm{FN}}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\mathrm{FN}:\mathrm{HN}=3:2$$

問題 3

$\triangle$ BCDにおいて点Hは重心であるから，

$$\mathrm{BH}:\mathrm{FH}=2:1$$

なので，$\mathrm{BH}=2\mathrm{FH}$.

問題 2 より，

$$\mathrm{FN}:\mathrm{HN}=3:2$$

から，$\mathrm{FH}=\mathrm{FN}+\mathrm{HN}$なので，$\mathrm{FN}=\frac{3}{5}\mathrm{FH}$，$\mathrm{HN}=\frac{2}{5}\mathrm{FH}$.

したがって，

$$\begin{aligned}\mathrm{BN}:\mathrm{FN}&=(\mathrm{BH}+\mathrm{HN}):\mathrm{FN}\\&=\left(2\mathrm{FH}+\frac{2}{5}\mathrm{FH}\right):\frac{3}{5}\mathrm{FH}\\&=12:3\\&=4:1\end{aligned}$$

$\triangle$ BFGと線分ANについてメネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{FN}}{\mathrm{BN}}\cdot\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{GM}}\cdot\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{AF}}=1$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{GM}}\cdot\frac{2}{3}=1$$

$$\mathrm{BM}=6\mathrm{GM}$$

したがって，$\mathrm{BG}=\mathrm{BM}+\mathrm{GM}$，また問題 1 より$\mathrm{BG}=\frac{4}{3}\sqrt{19}$なので，

$$\mathrm{GM}=\frac{1}{7}\mathrm{BG}=\frac{4}{21}\sqrt{19}$$