数学の出題のねらい

　数Ｉ・Ａに関する基本的な事項の習得度合いおよびその応用力をみることをねらいとしています．具体的には，基礎的な計算能力，確率を事象の考察に活用する能力，関数について考察する能力，定理を図形の計量に活用する能力などを総合的にみることを意図した出題を心掛けました．

# 第 1 問

問題 1

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=x^2$$

から，

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{1-x^2}{2}$$

なので，

$$\begin{aligned}\sin^3\ \theta-\cos^3\theta&=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\\&=x\left(1+\frac{1-x^2}{2}\right)\\&=-\frac{1}{2}x(x^2-3)\\&=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x\end{aligned}$$

問題 2

$x$の平均値は 4 であるから，

$$\frac{2+a+b+6}{4}=4$$

$$b=8-a\qquad\cdots ①$$

$y$の平均値を$\bar{y}$とし，①と，$x$と$y$の共分散が 3.5 であるから，

$$\frac{1}{4}\{(2-4)(1-\bar{y})+(a-4)(c-\bar{y})+(8-a-4)(2-\bar{y})+(6-4)(4-\bar{y})\}=3.5$$

$$(a-4)(c-2)=8$$

$a$，$c$は正の整数であるから，この式を満たす組は，

$$(a-4,c-2)=(1,8),(2,4),(4,2),(8,1)$$

$$(a,c)=(5,10),(6,6),(8,4),(12,3)$$

$a<c$と①より，

$$(a,b,c)=(5,3,10)$$

問題 3

・　$x \leqq -\frac{3}{2}$のとき，

$$-(2x-5)-(2x+3)<10$$
$$-4x+2<10$$
$$x>-2$$

よって，$-2<x\leqq -\frac{3}{2}$.

・　$-\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$のとき，

$$-(2x-5)+(2x+3)=8<10$$

よって，常に成立するので$-\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$.

・　$\frac{5}{2}\leqq x$のとき，

$$(2x-5)+(2x+3)<10$$
$$4x-2<10$$
$$x<3$$

よって，$\frac{5}{2}\leqq x<3$.

以上から，$-2<x<3$.

## 第 2 問

出た目の差の絶対値を表にすると以下の通り

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

問題 1

A の得点を$S_A$とすると，すべての場合の数は 36 で，上の表より$S_A \leqq 3$になる場合の数は 30．また B の得点は考慮に入れていないので，求める確率は,

$$\mathrm{P}(S_A \leqq 3) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

問題 2

A の得点を$S_A$，B の得点を$S_B$とすると，A の得点が 3 点以下でかつ B が A よりも 2 点以上多く得点を取る確率は

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(S_B - S_A \geqq 2 \text{ かつ} S_A \leqq 3\right)\\
&= \mathrm{P}\left(S_B = 5 \text{ かつ} S_A \leqq 3\right) + \mathrm{P}\left(S_B = 4 \text{ かつ} S_A \leqq 2\right) + \mathrm{P}\left(S_B = 3 \text{ かつ} S_A \leqq 1\right)\\
&\qquad + \mathrm{P}\left(S_B = 2 \text{ かつ} S_A = 0\right)\\
&= \frac{2}{36} \times \left(\frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{10}{36} + \frac{6}{36}\right) + \frac{4}{36} \times \left(\frac{8}{36} + \frac{10}{36} + \frac{6}{36}\right) + \frac{6}{36} \times \left(\frac{10}{36} + \frac{6}{36}\right) + \frac{8}{36} \times \frac{6}{36}\\
&= \frac{2}{36} \times \frac{30}{36} + \frac{4}{36} \times \frac{24}{36} + \frac{6}{36} \times \frac{16}{36} + \frac{8}{36} \times \frac{6}{36}\\
&= \frac{1}{18} \times \frac{15}{18} + \frac{2}{18} \times \frac{12}{18} + \frac{3}{18} \times \frac{8}{18} + \frac{4}{18} \times \frac{3}{18}\\
&= \frac{15 + 24 + 24 + 12}{324} = \frac{75}{324} = \frac{25}{108}
\end{aligned}$$

求める条件付き確率は

$$\mathrm{P}(S_B - S_A \geqq 2 | S_A \leqq 3) = \frac{\mathrm{P}\left(S_B - S_A \geqq 2 \text{ かつ} S_A \leqq 3\right)}{\mathrm{P}(S_A \leqq 3)}$$

$$= \frac{\frac{25}{108}}{\frac{5}{6}} = \frac{5}{18}$$

# 第 3 問

問題 1

$f(x) = ax^2 - (a+1)x + a - 4$

とする.

条件$0 < \alpha < \beta = 1$から$f(1) = 0$なので$a = 5$となる. このとき,

$$f(x) = 5x^2 - 6x + 1 = (x-1)(5x-1)$$

であるから, $f(x) = 0$の 2 つの解は$x = \frac{1}{5}, 1$となり, $\alpha = \frac{1}{5}$となる. これは条件$0 < \alpha < \beta = 1$を満たしているので, $a = 5$.

問題 2

$f(x) = 0$ の 2 解を$\alpha, \beta\ (\alpha \leqq \beta)$とし, $f(x) = 0$の判別式を$D$とすると

$$\begin{aligned} D &= (a+1)^2 - 4a(a-4) \\ &= -3a^2 + 18a + 1 \end{aligned}$$

$D \geqq 0$から$\frac{9-2\sqrt{21}}{3} \leqq a \leqq \frac{9+2\sqrt{21}}{3}$を得る.

$a > 0$から$y = f(x)$のグラフは下に凸の放物線で、軸の直線は$x = \frac{a+1}{2a}$であり,

$f(0) = a - 4$, $f(1) = a - 5$である.

条件を満たすのは, 次の式が同時に成り立つときに限る.

$$D \geqq 0, \qquad f(0) > 0, \qquad f(1) > 0, \qquad 0 < \frac{a+1}{2a} < 1, \qquad a > 0$$

したがって, $a$は

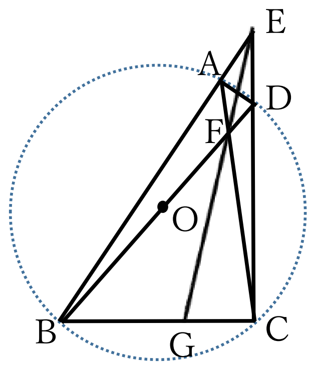
$$\begin{cases} \dfrac{9-2\sqrt{21}}{3} \leqq a \leqq \dfrac{9+2\sqrt{21}}{3} \\ a > 4 \\ a > 5 \\ a > 1 \\ a > -1 \\ a > 0 \end{cases}$$

を同時に満たさなくてはならない. ゆえに

$$5 < a \leqq \frac{9+2\sqrt{21}}{3}$$

# 第 4 問

問題 1




三角形 ABC について余弦定理を用いて，

$$\cos\angle ABC = \frac{36+16-25}{2\cdot 6\cdot 4} = \frac{9}{16}$$

したがって，

$$\sin^2\angle ABC = 1 - \left(\frac{9}{16}\right)^2 = \frac{175}{256}$$

であるから，

$$\sin\angle ABC = \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

三角形 ABC について外接円の半径をRとし，正弦定理を用いて，

$$R = \frac{5}{2\cdot\frac{5\sqrt{7}}{16}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

問題 2

三角形 ABD において BD は外接円の直径であるから，

$$BD = 2R = \frac{16\sqrt{7}}{7}$$

また、三角形 ABD は∠BADが直角の直角三角形であるから，

$$AD^2 = \left(\frac{16\sqrt{7}}{7}\right)^2 - 6^2 = \frac{4}{7}$$

したがって，

$$AD = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

三角形 ADE は直角三角形であるから，

$$DE^2 = \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{1024}{567}$$

したがって，

$$DE = \frac{32\sqrt{7}}{63}$$

問題 3

三角形 BCD は∠BCDが直角の直角三角形であるから，

$$\mathrm{CD}^2 = \left(\frac{16\sqrt{7}}{7}\right)^2 - 4^2 = \frac{144}{7}$$

したがって，

$$\mathrm{CD} = \frac{12\sqrt{7}}{7}$$

三角形 BCE にチェバの定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{CG}} \cdot \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DE}} \cdot \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}} = 1$$

$$\frac{4 - \mathrm{CG}}{\mathrm{CG}} \cdot \frac{\frac{12\sqrt{7}}{7}}{\frac{32\sqrt{7}}{63}} \cdot \frac{\frac{10}{9}}{6} = 1$$

$$\mathrm{CG} = \frac{20}{13}$$

三角形 BGE と線分 AC にメネラウスの定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CG}} \cdot \frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{EF}} \cdot \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}} = 1$$

$$\frac{4}{\frac{20}{13}} \cdot \frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{EF}} \cdot \frac{\frac{10}{9}}{6} = 1$$

$$\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{EF}} = \frac{27}{13}$$

したがって，

$$\mathrm{EF}:\mathrm{FG} = 13:27$$