数学の出題のねらい

　数Ｉ・Ａに関する基本的な事項の習得度合いおよびその応用力をみることをねらいとしています．具体的には，基礎的な計算能力，確率を事象の考察に活用する能力，関数とそのグラフについて考察する能力，定理を図形の計量に活用する能力などを総合的にみることを意図した出題を心掛けました．

第 1 問

問題 1

$$
\begin{aligned}
&9x^2+39x+6xy+21xz+y^2+13y+7yz+91z \\
&=(3x+y)^2+13(3x+y)+7z(3x+y+13) \\
&=(3x+y)(3x+y+13)+7z(3x+y+13) \\
&=(3x+y+7z)(3x+y+13)
\end{aligned}
$$

問題 2

$$
\begin{aligned}
&10+\frac{4}{3-\sqrt{7}} \\
&=10+\frac{4\left(3+\sqrt{7}\right)}{\left(3-\sqrt{7}\right)\left(3+\sqrt{7}\right)} \\
&=10+2\left(3+\sqrt{7}\right) \\
&=16+2\sqrt{7}
\end{aligned}
$$

$\left(2\sqrt{7}\right)^2=28$ より，$5^2<\left(2\sqrt{7}\right)^2<6^2$

ゆえに，$5<2\sqrt{7}<6$

したがって，$21<16+2\sqrt{7}<22$ であるから，$a=21$，$b=2\sqrt{7}-5$

問題 3

テスト A の平均点は，$(7+3+3+7+5)/5=5$であり，

テスト B の平均点は，$(5+4+x+y+3)/5=5-1=4$である．これから，

$$x+y=8 \tag{1}$$

を得る．また，テスト B の得点の分散は，

$$\frac{5^2+4^2+x^2+y^2+3^2}{5}-4^2=0.8$$

であるから，これから

$$x^2+y^2=34 \tag{2}$$

を得る．$x>y$および(1)と(2)から

$$x=5, \qquad y=3$$

を得る．

テスト A の得点の分散は，

$$\frac{7^2+3^2+3^2+7^2+5^2}{5}-5^2=\frac{16}{5}$$

テスト A の標準偏差は，

$$\sqrt{\frac{16}{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

テスト B の標準偏差は，

$$\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

共分散は，

$$\frac{\{(7-5)(5-4)+(3-5)(4-4)+(3-5)(5-4)+(7-5)(3-4)+(5-5)(3-4)\}}{5}=-\frac{2}{5}$$

相関係数は，

$$\frac{-\frac{2}{5}}{\frac{4}{\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{5}}}=-0.25$$

第 2 問

問題 1

$$\mathrm{P}(青) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap 青) + \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap 青) + \mathrm{P}(\mathrm{C} \cap 青)$$
$$= 0 + \frac{4}{9} \times \frac{6}{11} + \frac{2}{9} \times \frac{3}{10} = \frac{8}{33} + \frac{1}{15} = \frac{40 + 11}{165} = \frac{51}{165} = \frac{17}{55}$$

問題 2

求めるものは条件付確率なので，

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|白) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B} \cap 白)}{\mathrm{P}(白)}$$

ここで，

$$\mathrm{P}(\mathrm{B} \cap 白) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{11} = \frac{4}{33}$$
$$\mathrm{P}(白) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap 白) + \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap 白) + \mathrm{P}(\mathrm{C} \cap 白)$$
$$= \frac{3}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{33} + \frac{2}{9} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{6} + \frac{4}{33} + \frac{2}{45} = \frac{165 + 120 + 44}{3 \times 2 \times 11 \times 15} = \frac{329}{990}$$

したがって，

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|白) = \frac{\frac{4}{33}}{\frac{329}{990}} = \frac{4 \times 30}{329} = \frac{120}{329}$$

第３問

問題１
$f(x)$をx軸に関して対称移動したグラフを表す式は

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + ax - a$$

となる．
このグラフをx軸方向に2，y軸方向に-2だけ平行移動するからxを$x-2$に，
yを$y+2$に置き換えて$g(x)$は

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + (a+2)x - 3a - 4$$

問題２

$$h(x) = g(x) - f(x) = -x^2 + 2(a+1)x - 4a - 4 = -(x-(a+1))^2 + a^2 - 2a - 3$$

（ｉ） $a+1 \leqq -1$，すなわち，$a \leqq -2$のとき，$x=-1$で最大となる．
$\mathrm{M} = h(-1) = -6a - 7$

（ⅱ） $-2 < a < 2$のとき，$x = a+1$で最大となる．
$\mathrm{M} = h(a+1) = a^2 - 2a - 3$

（ⅲ） $3 \leqq a+1$，すなわち，$2 \leqq a$のとき，$x=3$で最大となる．
$\mathrm{M} = h(3) = 2a - 7$

問題３

（ｉ） $a \leqq -2$のとき，$\mathrm{M} = -6a - 7 \leqq 0$となる$a$の範囲は，$-\frac{7}{6} \leqq a$であり前提とする範囲と重なる部分がない．

（ⅱ） $-2 < a < 2$のとき，$\mathrm{M} = a^2 - 2a - 3 \leqq 0$より，$(a-3)(a+1) \leqq 0$である．これから
$-1 \leqq a \leqq 3$
したがって，$-1 \leqq a < 2$

（ⅲ） $2 \leqq a$のとき，$\mathrm{M} = 2a - 7 \leqq 0$より，これから$a \leqq \frac{7}{2}$
したがって，$2 \leqq a \leqq \frac{7}{2}$

以上から，$\mathrm{M} \leqq 0$となるaの範囲は，$-1 \leqq a \leqq \frac{7}{2}$

第 4 問

問題 1
AD, CE が円の弦であり，AD, CE の延長の交点が B であるから，方べきの定理より

$$\mathrm{BD} \cdot \mathrm{BA} = \mathrm{BE} \cdot \mathrm{BC}$$

である．ここで，

$$\mathrm{BD} = \frac{1}{3}\mathrm{BA} = 2$$

なので，

$$2 \cdot 6 = \mathrm{BE} \cdot 4$$
$$\mathrm{BE} = 3$$

これから，

$$\mathrm{CE} = 4 - \mathrm{BE} = 1$$

問題 2
メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} \cdot \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{CF}} \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{BE}} = 1$$
$$\frac{6}{4} \cdot \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{CF}} \cdot \frac{1}{3} = 1$$
$$\mathrm{DF} = 2\mathrm{CF}$$

同様に，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}} \cdot \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{AF}} \cdot \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} = 1$$
$$\frac{4}{1} \cdot \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{AF}} \cdot \frac{4}{2} = 1$$
$$\mathrm{AF} = 8\mathrm{EF}$$

方べきの定理より，

$$\mathrm{AF} \cdot \mathrm{EF} = \mathrm{CF} \cdot \mathrm{DF}$$
$$\mathrm{CF}^2 = 4\mathrm{EF}^2$$

したがって，

$$\mathrm{CF} : \mathrm{EF} = 2 : 1$$

問題 3

$\angle \mathrm{ACB} = \theta$とし，$\Delta \mathrm{ABC}$について余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{16+25-36}{2\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{8}$$

よって，

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{1}{64}$$

$$\sin\theta = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$\Delta \mathrm{AEC}$の面積は，

$$\Delta \mathrm{AEC} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 5\cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{16}$$

ここで，問題 2 の$\mathrm{AF} = 8\mathrm{EF}$から$\mathrm{EF}:\mathrm{AE} = 1:9$なので，

$$\Delta \mathrm{CFE} = \frac{1}{9}\Delta \mathrm{AEC} = \frac{5\sqrt{7}}{48}$$